Алгебра и логика, 42, N 6 (2003), 655—682

УДК 512.865.3

ГРУППЫ ОРНАМЕНТОВ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

Р. М. ГАРИПОВ

Введение

В данной статье алгебраический метод вычисления кристаллографических групп [1, 2] применяется в псевдоэвклидовом пространстве частного вида — плоскости Минковского $R_{1,1}$, т. е. в 2-мерном аффинном пространстве с метрикой $dx_1^2 - dx_2^2$. В этом случае удается провести классификацию по изоморфизму кристаллографических групп. Этой проблеме посвящен ряд работ (см. [3, 4]), но применяемые в них геометрические методы эвклидовой кристаллографии не позволяют провести классификацию.

Слово *кристалл* в общем названии этих групп происходит от соответствующего физического понятия — трехмерной периодической структуры. На плоскости периодические структуры (рисунки) называются *орнаментами*, поэтому в рассматриваемом частном случае будет применяться термин "группа орнаментов". На эвклидовой плоскости с метрикой $dx_1^2 + dx_2^2$ имеются всего 17 групп орнаментов, и они вычисляются последовательно, одна за другой, пока не исчерпаются. На плоскости Минковского так поступить нельзя, поскольку на ней групп орнаментов бесконечно много. Они распадаются на 10 серий по виду определяющих соотношений групп поворотов, которые здесь обозначаем римскими цифрами I–X. Серии I–IV совпадают с эвклидовыми и не рассматриваются. Каждая из серий V–X состоит из бесконечного числа классов групп, нумеруемых целочисленным параметром $m \geqslant 3$. Класс содержит конечное число (с точностью до изоморфизма) групп орнаментов. При любом числовом значении параметра m алгоритм позволяет эффективно вычислить все элементы классов в сериях V–X. Для основных решеток (множество которых обозначим *) удается получить ответ в буквенном виде сразу для всех значений параметра m.

Доказывается, что для каждой группы орнаментов Δ из серий V–X орбита $\{gx \mid g \in \Delta\}$ почти любой точки $x \in R_{1,1}$ всюду плотна в эвклидовой метрике. Поэтому факторизация плоскости $R_{1,1}$ по отношению $x \sim y$, если существует $g \in \Delta$ такой, что $y = gx$, не дает геометрического многообразия.

§ 1. Обобщение теоремы Бибербаха

В этом параграфе вводятся несколько более общие определения и обозначения, чем понадобится в дальнейшем. Обозначим через $R_{m,n-m}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ n-мерное вещественное аффинное пространство с метрикой

$$dx_1^2 + \ldots + dx_m^2 - dx_{m+1}^2 - \ldots - dx_n^2$$

и через $P_{m,n-m}$ — группу его движений, состоящую из аффинных преобразований, сохраняющих эту метрику. Пусть $O_{m,n-m} \subset P_{m,n-m}$ — подгруппа однородных преобразований, оставляющих неподвижной начало системы координат 0. При $m < n$ пространство $R_{m,n-m}$ называется *псевдоэвклидовым*, при $m = n$ оно эвклидово. Группа $P_{m,n-m}$ состоит из отображений вида $\tau A : x = (x_1, \ldots, x_n) \to \tau + Ax$, где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — трансляция (параллельный перенос) на вектор, обозначенный той же буквой τ, а матрица A принадлежит $O_{m,n-m}$. Напомним, что умножением является композиция отображений. Группу $P_{m,n-m}$ снабдим стандартной топологией конечномерного многообразия. В частном случае $m = 1$ (или $m = n-1$) и $n \leqslant 4$ для введенных множеств в физике существуют специальные названия: $R_{1,n-1}$ — пространство Минковского, $P_{1,n-1}$ — группа Пуанкаре, $O_{1,n-1}$ — общая группа Лоренца.

Всюду далее одинаково обозначаются трансляция, ее вектор и точка пространства $R_{m,n-m}$ с этим радиус-вектором. Например, под $\mathbb{Z}^n$ подразумеваются три понятия: множество трансляций, модуль над $\mathbb{Z}$ и кубическая система точек. При необходимости вектор или векторное выражение заключаем в квадратные скобки, чтобы придать им статус трансляции. Это позволяет кратко записать правило перестановки трансляции и матрицы, стоящих рядом в произведении:

$$A\tau = [A\tau]A, \ \tau A = A[A^{-1}\tau]. \tag{1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Кристаллографической группой* в пространстве $R_{m,n-m}$ (или *группой орнаментов* при $n = 2$) называется дискретная подгруппа $\Delta \subset P_{m,n-m}$, содержащая n линейно независимых над $\mathbb{R}$ трансляций.

Напомним, что подгруппа Δ топологической группы $P_{m,n-m}$ называется *дискретной*, если существует окрестность V единицы $0I$ такая, что $\Delta \cap V = \{0I\}$ (0 — трансляция на нулевой вектор, I — единичная матрица). Дискретная подгруппа топологически замкнута.

С каждой кристаллографической группой Δ связаны два множества: нормальная подгруппа трансляций $Z \subset \Delta$ (*решетка*) и *группа поворотов* $\Gamma = \{A \mid \exists \tau A \in \Delta\} \subset O_{m,n-m}$, изоморфная Δ/Z. Иногда эти множества целесообразно указывать в обозначении кристаллографической группы: $\Delta = \Delta(\Gamma, Z)$. Существует матрица $E \in GL(n, \mathbb{R})$ такая, что $Z = E\mathbb{Z}^n$ (здесь Z и $\mathbb{Z}^n$ выступают как множества векторов трансляций). Матрицу E называют *базисом* решетки Z. Группа Γ дискретна, а решетка инвариантна относительно Γ, т. е. для любого $A \in \Gamma$ справедливо $AZ = Z$. Поэтому в базисе решетки группа поворотов унимодулярна: $\Gamma^E \stackrel{\text{def}}{=} E^{-1}\Gamma E \subset GL(n, \mathbb{Z})$. Эти утверждения доказаны в [1]. Вообще говоря, Γ не включается в Δ. Если $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta = Z \cdot \Gamma$. Такие группы в кристаллографии называются *симморфными*.

В эвклидовых пространствах, как впервые доказал Бибербах (см. [5–7]), отношения изоморфизма и аффинного подобия кристаллографических групп равносильны. Кристаллографические группы Δ и Δ' называются *аффинно подобными*, если существует аффинное преобразование θF пространства такое, что $\Delta' = \theta F \cdot \Delta \cdot (\theta F)^{-1}$. В пространстве Минковского справедливо более слабое утверждение (теор. 1), но его достаточно для классификации по изоморфизму.

ТЕОРЕМА 1. *Если кристаллографические группы* $\Delta(\Gamma, Z)$ *и* $\Delta'(\Gamma', Z')$ *в пространстве* $R_{1,n-1}$ *изоморфны, то найдется матрица* $F \in GL(n, \mathbb{R})$ *такая, что*

$$\Gamma' = F\Gamma F^{-1},\ Z' = FZ. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi : \Delta \to \Delta^{\varphi} = \Delta'$ — алгебраический изоморфизм. Рассуждение сводится к проверке двух утверждений: 1) $Z^{\varphi} = Z'$; 2) существует невырожденная матрица F, удовлетворяющая равенствам (2).

1) Пусть произвольные трансляции $t \in Z$ и $t' \in Z'$ имеют образ $p'P'$ и прообраз sS соответственно. Требуется доказать, что $P' = I$. Произведение $sS \cdot t \cdot (sS)^{-1}$ является трансляцией (так как $Z \trianglelefteq \Delta$) и поэтому коммутирует с t. По свойству изоморфизма перестановочны также их образы:

$$p'P'(t' \cdot p'P' \cdot t'^{-1}) = (t' \cdot p'P' \cdot t'^{-1})p'P'.$$

Используя (1) и сокращая на $(p'P')^2$, преобразуем это равенство к виду $(P' - I)^2 t' = 0$. Поскольку вектор $t' \in Z'$ выбран произвольно, он принимает n линейно независимых значений. Матрица P' не зависит от t', тогда $(P' - I)^2 = 0$.

Справедливо $P' = I$, если согласно условию теоремы $P' \in O_{1,n-1}$. Предположим противное, т. е. $P' - I \neq 0$. В силу псевдоортогональности матрицы $P' \in O_{1,n-1}$ имеем

$$(P' - I)^2 = -P'J(P' - I)^T J(P' - I),$$

где J — диагональная матрица с элементами $J_{11} = 1$, $J_{22} = \ldots = J_{nn} = -1$; верхним индексом T обозначается транспонирование матрицы. Для разности $A = P' - I$ получаем уравнение $A^T J A = 0$, тогда область значений матрицы A лежит в изотропном конусе и поэтому одномерна: найдутся векторы a и b, такие что $A = (a_i b_j)$. По предположению $A \neq 0$, векторы a и b ненулевые. Из $A^2 = 0$ следует $P'^{-1} = (I + A)^{-1} = I - A$. Поскольку P' псевдоортогональна, верно $P'^{-1} = JP'^T J$. Тогда $-A = JA^T J$. Подставив сюда элементы матрицы A, получим $a = 0$ или $b = 0$, приходим к противоречию с предположением $A \neq 0$. Следовательно, $P' = I$ и $Z^\varphi \subset Z'$. Так как φ^{-1} тоже является изоморфизмом, то $Z'^{\varphi^{-1}} \subset Z$. Отсюда $Z^\varphi = Z'$.

2) Пусть $Z = E\mathbb{Z}^n$. Вектор-столбцы $e_1, \ldots, e_n$ матрицы E составляют базис решетки Z как модуля над $\mathbb{Z}$ и линейно независимы над $\mathbb{R}$. Изоморфизм φ отображает трансляцию $[e_i] \in Z$ в $[e_i]^\varphi = [e'_i] \in Z'$. Согласно п. 1 векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис решетки Z' как модуля над $\mathbb{Z}$ и поэтому линейно независимы над $\mathbb{R}$. Таким образом, линейное невырожденное отображение F определяется равенствами

$$Fe_i = e'_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Рассуждениями, аналогичными [7, ч. I, гл. 1, § 4, п. 4], доказывают, что матрица F удовлетворяет условиям (2). □

Рассмотрим две изоморфные кристаллографические группы Δ и Δ' с общей группой поворотов Γ и решетками Z и Z', имеющими базисы E и E' соответственно. Согласно теореме 1 найдется матрица $F \in GL(n, \mathbb{R})$ такая, что $\Gamma = F\Gamma F^{-1}$, $Z' = FZ$. Из первого равенства видим, что матрица F коммутирует с группой Γ, т. е. принадлежит ее нормализатору $N(\Gamma)$. Второе равенство можно записать в виде $E'\mathbb{Z}^n = FE\mathbb{Z}^n$, откуда следует $E' = FEC$, где C — некоторая унимодулярная матрица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Базисы E и E' решеток Z и Z' (а также сами решетки) будем называть Γ-*эквивалентными* и записывать как $E \overset{\Gamma}{\sim} E'$ или $Z \overset{\Gamma}{\sim} Z'$, если $\exists F \in N(\Gamma)\, \exists C \in GL(n, \mathbb{Z})\, E' = FEC$.

Γ-эквивалентность базисов E и E' удобно сформулировать также следующим образом:

$$\exists F \in N(\Gamma)\, E^{-1}FE' \in GL(n, \mathbb{Z}). \tag{3}$$

Базисы одной и той же решетки называются *унимодулярно эквивалентными*, они Γ-эквивалентны для любой группы Γ. Каждый нормализатор содержит матрицы вида cI, где $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Поэтому базисы E и

$E' = cE$ тоже Г-эквивалентны для любой группы Г. Силу отношения Г-эквивалентности определяет нормализатор $N(\Gamma)$: если $N(\Gamma) \subset N(H)$, то Г-эквивалентность базисов влечет их H-эквивалентность.

§ 2. Группы поворотов

Теорема 1 позволяет применить трехуровневый иерархический метод классификации кристаллографических групп почти так же, как в эвклидовом случае [1, 2]. На каждом уровне иерархии класс эквивалентности предыдущего уровня разбивается на подклассы по другому отношению эквивалентности, причем так, чтобы элементы разных подклассов были заведомо неизоморфными. На первом уровне отношение эквивалентности кристаллографических групп задается как аффинное подобие их групп поворотов Г. На втором уровне используется Г-эквивалентность решеток. На третьем, последнем, уровне отношением эквивалентности служит изоморфизм, здесь кристаллографические группы взаимно однозначно (с точностью до изоморфизма) соответствуют элементам фактор-модуля, образованного из определяющих векторов.

Заметим, что определяющие векторы принадлежат Z. А в силу (2) на подгруппе $Z \subset \Delta$ изоморфизм $\Delta \to \Delta^{\varphi}$ действует так же, как аффинное подобие $\Delta \to F\Delta F^{-1}$. Поэтому изоморфные кристаллографические группы отображаются друг в друга аффинным подобием, сохраняющим неизменными Г и Z, т. е. оно задается матрицей $F \in N(\Gamma)$, $FZ = Z$. Множество таких матриц F обозначим $N_0(\Gamma)$, оно является подгруппой нормализатора $N(\Gamma)$. Получаем конструктивное описание эквивалентности на заключительном уровне классификации. Таким образом, с точностью до указанных эквивалентностей необходимо найти 1) все Г, 2) все Z при заданном Г, 3) все Δ при заданных Г и Z. В двухмерном пространстве $R_{1,1}$ эта программа реализуется сравнительно просто.

Далее будет рассматриваться только плоскость Минковского $R_{1,1}$. Заменой координат преобразуем метрику

$$dx_1^2 - dx_2^2 \to dx_1\,dx_2.$$

Тогда изотропные прямые, на которых метрика индуцирует нулевую длину, будут параллельны координатным осям.

Группы поворотов Γ вычисляются исходя непосредственно из определений. Поэтому сразу выпишем их системы образующих и определяющих соотношений. Для этого понадобятся матрицы

$$R = R(q) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $q = q_m = m/2 + \sqrt{m^2/4 - 1}$, $3 \leqslant m \in \mathbb{Z}$.

Множество всех групп поворотов Γ разобьем на 10 серий, которые обозначим римскими цифрами I–X. Соответственно по этим сериям распределятся группы орнаментов Δ.

I. $\{I\}$.

II. $\{I, P\}$.

III. $\{I, L\}$.

IV. $\{I, P, L, PL\}$.

Эти конечные группы поворотов совпадают с эвклидовыми, аналогичное утверждение справедливо и для соответствующих групп орнаментов. Поэтому дальше они не будут рассматриваться. Остальные серии содержат бесконечное число групп Γ, нумерованных целочисленным параметром $m = 3, 4, \ldots$.

V. $A_m = (R)$.

VI. $\bar{A}_m = (\bar{R})$ $(\bar{R} = -R)$.

VII. $B_m = (R, P)$, $P^2 = I$, $PRP^{-1}R^{-1} = I$.

VIII. $C_m = (R, L)$, $L^2 = I$, $(RL)^2 = I$.

IX. $\bar{C}_m = (\bar{R}, L)$, $L^2 = I$, $(\bar{R}L)^2 = I$.

X. $D_m = (R, P, L)$, $P^2 = I$, $PRP^{-1}R^{-1} = I$, $L^2 = I$, $(RL)^2 = I$, $PLP^{-1}L^{-1} = I$.

Множество групп орнаментов, принадлежащих одной серии и имеющих одно и то же значение параметра m, назовем *классом*. В дальнейшем увидим, что с точностью до изоморфизма все классы являются конечными множествами.

Свободная циклическая группа $A_m = (R)$ содержит группы $A_{m'} = (R^l)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ в качестве своих подгрупп. Аналогичные включения выполняются в других сериях. Вычислим функцию $m' = m'(l, m)$, учитывая равенство $(R(q))^l = R(q^l)$. Имеем

$$q^l = \left(m/2 + \sqrt{m^2/4 - 1}\right)^l = r + s\sqrt{m^2/4 - 1} = m'/2 + \sqrt{m'^2/4 - 1},$$

где r, s — рациональные числа, а корни, как легко видеть, иррациональны. Раскладывая степень по формуле бинома Ньютона, а затем, приравнивая рациональные и иррациональные части этих выражений, получаем две функции $\mu_l(m) = m' = 2r$ и $\nu_l(m) = s$. Они определены для целых $l \geqslant 1$, $m \geqslant 3$ и принимают целые положительные значения. Из свойства степени $q_m^{ll'} = (q_m^l)^{l'}$ вытекают тождества

$$\mu_{ll'} = \mu_l \circ \mu_{l'}, \ \nu_{ll'} = (\nu_l \circ \mu_{l'}) \cdot \nu_{l'},$$

где через $\circ$ обозначается композиция функций.

Группу поворотов Γ назовем *максимальной*, если она не включается в другую группу Γ' той же серии. Из следующей теоремы вытекает, что максимальные группы серии V не пересекаются, кроме как в I.

ТЕОРЕМА 2. *Если $A_m \cap A_n \neq \{I\}$, то $A_p \supset A_m \cup A_n$ для некоторого p.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что справедливо следующее утверждение: если $q_m^i = q_n^j$ для некоторых положительных целых чисел i и j, то найдется p такое, что q_m и q_n представимы в виде степени от q_p. Раскладывая степени по формуле бинома Ньютона, приведем условие этой импликации к виду

$$a_1 + b_1\sqrt{m^2 - 4} = a_2 + b_2\sqrt{n^2 - 4},$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — положительные рациональные числа. Если $a_1 \neq a_2$, то простые вычисления показывают, что число $\sqrt{m^2 - 4}$ рационально, а это не так. Следовательно, $a_1 = a_2$. Тогда найдутся положительные целые числа k_1, k_2 и $D > 1$, причем k_1 и k_2 будут взаимно простыми и

$$\sqrt{m^2 - 4} = k_1\sqrt{D}, \quad \sqrt{n^2 - 4} = k_2\sqrt{D}.$$

Рассмотрим диофантово уравнение $x^2 - Dy^2 = 4$. Так как D не является квадратом и имеет вид $4k$ либо $4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ (m^2-4 и n^2-4 удовлетворяют этому условию), то данное уравнение разрешимо [8]. Каждому положительному решению $x > 0$, $y \geqslant 0$ сопоставляется число $(x+\sqrt{D}y)/2 = q_x$ (равенство получается исключением y из левой части с помощью уравнения). Пусть p, y_1 — минимальное решение. Тогда любое положительное решение x, y выражается через минимальное в виде $q_x = q_p^l$ с некоторым целым показателем $l \geqslant 1$. Решения $x = m, y = k_1$ и $x = n, y = k_2$ тоже можно выразить через степень числа q_p. $\square$

Нормализаторы групп Γ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &N(A_m) = N(\bar{A}_m) = N(B_m) = \{I, L\}\{\mathrm{diag}\}, \\ &N(C_m) = \{I, L\}\{R^{k/2} \mid k \in \mathbb{Z}\}\{aI\}, \\ &N(\bar{C}_m) = \{I, L\}\{\varepsilon_1^k R^{k/2} \mid k \in \mathbb{Z}\}\{aI\}, \\ &N(D_m) = \{I, L\}\{I, \varepsilon_1\}\{R^{k/2} \mid k \in \mathbb{Z}\}\{aI\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где diag — диагональная матрица, $a \in \mathbb{R}$.

§ 3. Подгруппы трансляций (решетки)

Группы A_m, $\bar{A}_m$, B_m. *O-множеством* $O(\Gamma)$ назовем множество базисов инвариантных решеток группы Γ. Базис E принадлежит $O(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда в нем образующие группы Γ унимодулярны. Множество $O(\Gamma)$ разбивается на классы Γ-эквивалентности. Необходимо найти по одному представителю из каждого класса. Так как образующие групп A_m, $\bar{A}_m$ и B_m одновременно унимодулярны или нет в любом базисе E, то O-множества этих групп совпадают и одинаково разбиты на классы Γ-эквивалентности благодаря совпадению их нормализаторов (4). Поэтому достаточно рассмотреть группу A_m с образующей $R = R(q)$ ($q = q_m$).

Инвариантная решетка $Z = E\mathbb{Z}^2$ группы A_m располагается иррационально относительно осей координат. Действительно, пусть на оси x_1, кроме 0, имеются еще точки решетки Z, а $y = (y_1, 0)$ — ближайшая из них к 0. Тогда точка $R^{-1}y$ будет лежать на оси x_1 и находиться ближе к 0, чем y. Аналогичное противоречие получим, предположив существование ненулевых точек решетки на оси x_2. Таким образом, Z пересекается с осями координат только в 0, а значит, все элементы матрицы E ненулевые. Так как базис E ищется с точностью до A_m-эквивалентности, то умножив его слева на диагональную матрицу из нормализатора $N(A_m)$, элементы одного, например, первого столбца можно сделать равными любым наперед заданным ненулевым числам. В E матрица R унимодулярна и имеет те же след m и определитель 1, поэтому может быть представлена в виде

$$E^{-1}RE = \begin{pmatrix} m/2+b & c \\ -a & m/2-b \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где a, $b-m/2$, $c \in \mathbb{Z}$,

$$b^2 - ac = N \stackrel{\text{def}}{=} m^2/4 - 1.$$

Умножив равенство (5) слева на матрицу $E = (e_{ij})$, получим систему линейных уравнений на элементы e_{ij}. При дополнительной нормировке $e_{11} = e_{21} = a$ эта система имеет единственное решение

$$E = \begin{pmatrix} a & b-\sqrt{N} \\ a & b+\sqrt{N} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, любой элемент множества $O(A_m)$ будет A_m-эквивалентен одному из этих базисов.

Среди базисов (6) надо выбрать те, которые не являются попарно A_m-эквивалентными. Соответствие $E \to (a,b,c)$ между базисами $E \in$ $\in O(A_m)$ и тройками чисел a,b,c, определяющих матрицу (5) однозначно, и даже взаимно однозначно, если базисы рассматривать с точностью до A_m-эквивалентности. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением троек (a,b,c). Выясним, как они преобразуются при A_m-эквивалентной замене базисов. Для этого представим матрицу (5) в виде

$$R^E = (m/2)I + \varepsilon_2 F,\ \text{где}\ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Тройке чисел (a, b, c) сопоставляется симметричная матрица F. Имеем

$$R^E \to R^{AEB} = B^{-1}E^{-1}(A^{-1}RA)EB,$$

где матрица $A \in N(A_m)$, в силу (4), равна либо диагональной матрице A_1, либо LA_1; тогда $A^{-1}RA$ равно R либо R^{-1}. Легко заметить, что матрице $(R^{-1})^E = (R^E)^{-1}$ соответствует $-F$. После несложных выкладок получим

$$F \to \pm(1/\det B)B^T FB, \tag{7}$$

где знаки $\pm$ соответствуют указанным значениям $A = A_1$ и $A = LA_1$ соответственно.

Таким образом, при A_m-эквивалентной замене базиса числа a, b, c преобразуются как коэффициенты квадратичной формы

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

с дискриминантом $b^2 - ac = N$ при 1) унимодулярной подстановке координат $x \to Bx$; 2) умножении квадратичной формы на ± 1. Задача свелась к классификации квадратичных форм с заданным дискриминантом относительно преобразований эквивалентности вида 1 и 2. Эту задачу решил К. Ф. Гаусс [8] для преобразований вида 1, а так как операции 1 и 2 перестановочны, то добавленная нами эквивалентность 2 ничего не меняет в его алгоритме. Имеется только конечное число попарно неэквивалентных квадратичных форм с заданным дискриминантом. Соответственно, множество $O(A_m)$ разбивается на конечное число классов A_m-эквивалентности, их представители эффективно вычисляются при заданном числовом значении параметра m. Следуя [8], квадратичную форму обозначим (a, b, c) и назовем просто формой.

Группы C_m, $\bar{C}_m$, D_m. Рассмотрим группу C_m. Поскольку $C_m \supset \supset A_m$, то $O(C_m) \subset O(A_m)$. Поэтому базисы инвариантных решеток группы C_m ищем в $O(A_m)$. Пусть $O_i \subset O(A_m)$ $(i = 1, \dots, p)$ — класс A_m-эквивалентности, и $E_0 \in O_i$. Согласно определению 2 произвольный элемент множества O_i имеет вид $E = AE_0B$, где $A \in N(\Gamma)$ и матрица B унимодулярна. В таком виде и ищем базисы $E \in O(C_m) \cap O_i$.

Так как $N(C_m) \subset N(A_m)$, то любые два базиса из разных множеств $O_1, \dots, O_p$ не будут C_m-эквивалентны. Нас интересует базис E с точностью до C_m-эквивалентности, поэтому умножив его справа на B^{-1}, получим $E = AE_0$ (C_m-эквивалентно преобразованный базис обозначим той же буквой). Неизвестный множитель A определяется из условия унимодулярности новой образующей $L' = L^{AE_0}$ (старая образующая R^{AE_0} унимодулярна при любом $A \in N(A_m)$). При этом достаточно ограничиться диагональным значением A, поскольку $L^{LAE_0} = L^{AE_0}$.

Предположим, что найдется диагональная матрица A, для которой $L' = L^E \in GL(2, \mathbb{Z})$. Учитывая, что $L^2 = I$, получаем

$$E = LEL' = LEL \cdot B, \text{ где } B = LL' \in GL(2, \mathbb{Z}), \ \det B = 1.$$

Рассмотрим цепочку A_m-эквивалентностей

$$E_0 \to E = AE_0 \to LEL \to (LEL)B = E.$$

Согласно (7) им отвечают преобразования матриц форм:

$$F \to F \to L^T FL \to B^T(L^T FL)B = L'^T FL'.$$

Матрицы F и $L'^T FL'$ соответствуют одному и тому же базису E, поэтому они равны. Здесь $\det L' = -1$, и в этом случае говорят, что форма с матрицей F *несобственно эквивалентна* самой себе. Таким образом, если матрица L^{AE_0} унимодулярна, то форма базиса E_0 несобственно эквивалентна самой себе, в противном случае все остальные элементы класса O_i таковы и $O(C_m) \cap O_i = \varnothing$. Этот случай легко распознается алгоритмом Гаусса и поэтому исключим его из дальнейшего рассмотрения.

Итак, пусть форма базиса E_0 несобственно эквивалентна самой себе. Тогда в силу [8] она эквивалентна некоторой *двусторонней* форме (a, b, c) (т. е. $2b/a \in \mathbb{Z}$). Значит, в классе O_i найдется базис с такой формой, каковой выберем в качестве представителя E_0 и назовем *двусторонним.* Тогда $L^{E_0} \in GL(2, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пару целых чисел (m_1, l_1) ($3 \leqslant m_1 \leqslant m, l_1 \geqslant 1$) назовем *минимальной парой* базиса $E_0 \in O(A_m)$ с формой (a, b, c), если

$m = \mu_{l_1}(m_1)$, $\nu_{l_1}(m_1)$ делит (a, b, c) и m_1 наименьшее. При $b \in \mathbb{Z} + 1/2$ это означает, что $\nu_{l_1}(m_1)$ делит $2b$; при $m_1 \in 2\mathbb{Z}+1$ должно быть $b/\nu_{l_1}(m_1) \in \in \mathbb{Z} + 1/2$.

Эти условия обеспечивают, что $A_m \subset A_{m_1}$ $(q_m = q_{m_1}^{l_1})$ и $E_0 \in O(A_{m_1})$. Поэтому для максимальных групп A_m минимальная пара равна $(m, 1)$.

Искомые базисы $E = AE_0$, как уже сказано, определяются из условия унимодулярности образующей L^E. Непосредственные вычисления показывают, что

$$E = \begin{pmatrix} \zeta q_{m_1}^{n/2} & 0 \\ 0 & q_{m_1}^{-n/2} \end{pmatrix} E_0 \quad (\zeta = \pm 1, n \in \mathbb{Z}), \;\; q_m = q_{m_1}^l, \tag{8}$$

где (m_1, l) — минимальная пара двустороннего базиса $E_0 \in O_i$. Среди этих базисов надо выбрать те, которые не являются попарно C_m-эквивалентными. Эта задача не выразима на языке квадратичных форм, так как этот язык не различает нормализаторы $N(A_m)$ и $N(C_m)$.

Рассмотрим два базиса E и E' из (8) с параметрами ζ, n и ζ', n' соответственно. Согласно (3) отношение $E \overset{C_m}{\sim} E'$ равносильно существованию унимодулярной матрицы вида $B = E^{-1}AE'$, где $A \in N(C_m)$. Из (4) находим, что $A = A_1 = a(R(q_m))^{k/2}$ либо $A = LA_1$. Если соответствующие значения матрицы B обозначить B_1 и B_1', то $B_1' = L^E \cdot B_1$. В силу принадлежности $E \in O(C_m)$, матрицы B_1' и B_1 унимодулярны одновременно. Поэтому достаточно рассмотреть B_1. Так как $\det B_1 = a^2$, то $a = \pm 1$. Пусть $a = 1$ и

$$n' - n + kl = 2k_1 + k_2 \quad (k_1 \in \mathbb{Z};\; k_2 = 0, 1).$$

Множитель $((R(q_{m_1}))^{k_1})^{E_0}$ унимодулярен в силу $E_0 \in O(A_{m_1})$, его можно отбросить. Получаем

$$B_2 = E_0^{-1} \begin{pmatrix} \zeta\zeta' q_{m_1}^{k_2} & 0 \\ 0 & q_{m_1}^{-k_2/2} \end{pmatrix} E_0.$$

Таким образом, вопрос о выполнимости отношения $E \overset{C_m}{\sim} E'$ свелся к тому, найдется ли значение $k \in \mathbb{Z}$, для которого матрица B_2 унимодулярна.

В табл. 1 дается ответ на вопрос о том, справедливо ли $B_2 \in GL(2, \mathbb{Z})$.

Таблица 1

	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$
$\zeta = \zeta'$	ДА	НЕТ
$\zeta \neq \zeta'$	НЕТ	B_{22}

С ее помощью легко найти представители классов C_m-эквивалентности среди базисов (8). При нечетном l имеем $k_2 \equiv n' - n + k \pmod 2$. Поэтому если в строке таблицы найдется унимодулярная матрица, то $E \overset{C_m}{\sim} E'$. Во второй строке такой матрицы не будет, если $B_{22} = (\varepsilon_1 (R(q_{m_1}))^{1/2})^{E_0} \notin GL(2,\mathbb{Z})$, и в этом случае есть два представителя: E_0 и $\varepsilon_1 E_0$, в противном случае — только E_0. Если l четно, то $k_2 \equiv n' - n \pmod 2$ не зависит от k. В силу верхней левой клетки табл. 1, базисы с одинаковыми ζ и с одинаковой четностью n являются C_m-эквивалентными, поэтому имеются четыре представителя

$$E_0,\ E_0^{(1)} = (R(q_{m_1}))^{1/2} E_0,\ \varepsilon_1 E_0,\ \varepsilon_1 E_0^{(1)}.$$

При $B_{22} \notin GL(2,\mathbb{Z})$ все эти представители не будут C_m-эквивалентны. Если матрица B_{22} унимодулярна, то C_m-эквивалентными будут 1-й и 4-й, а также 2-й и 3-й, поэтому в качестве представителей можно выбрать E_0 и $\varepsilon_1 E_0$. Напомним, что все эти базисы лежат в одном классе A_m-эквивалентности с двусторонним представителем E_0. Таким образом, базис E_0 расщепляется в C_m.

Инвариантные решетки групп $\bar{C}_m$ и D_m имеют те же базисы (8). Только их отношение Г-эквивалентности будет другим из-за различия нормализаторов. Обобщим результаты.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо $O(\Gamma) \subset O(A_m)$ для $\Gamma = C_m, \bar{C}_m, D_m$. Пусть $O_i \subset O(A_m)$ $(i = 1,\dots,p)$ — классы A_m-эквивалентности, и $E_0 \in O_i$. Если форма базиса E_0 не является несобственно эквивалентной самой себе, то $O_i \cap O(\Gamma) = \varnothing$. В противном случае в классе O_i найдется двусторонний базис (т. е. имеет форму (a,b,c), где $2b/a \in \mathbb{Z}$), который выберем в качестве представителя E_0. Тогда в O_i имеется до четырех*

Таблица 2

Γ	l_1	$B_{22} \in GL(2,\mathbb{Z})$	Представители
C_m	нечетно	ДА	E_0
		НЕТ	$E_0,\ \varepsilon_1 E_0$
	четно	ДА	$E_0,\ \varepsilon_1 E_0$
		НЕТ	$E_0,\ \varepsilon_1 E_0,\ E_0^{(1)},\ \varepsilon_1 E_0^{(1)}$
$\bar{C}_m$	нечетно		$E_0,\ \varepsilon_1 E_0$
	четно	ДА	E_0
		НЕТ	$E_0,\ E_0^{(1)}$
D_m	нечетно		E_0
	четно	ДА	E_0
		НЕТ	$E_0,\ E_0^{(1)}$

классов Γ*-эквивалентности, представители которых указаны в табл.* 2, *где* (m_1, l_1) — *минимальная пара базиса* E_0.

§ 4. Группы орнаментов

Пусть заданы группа поворотов Γ и решетка Z. Требуется найти все группы орнаментов $\Delta = \Delta(\Gamma, Z)$ с этими Γ и Z. Представители смежных классов обозначим πP, λL, ρR, $\rho\bar{R}$ $(R = R(q),\ q = q_m)$, где $\pi,\ \lambda,\ \rho \in \mathbb{R}^2$ называются *дробными* трансляциями, которые, вообще говоря, не принадлежат решеткам. Тогда определяющие соотношения из серий V–X дадут следующие определяющие векторы

$$\begin{aligned} u &= (\lambda L)^2 = (I+L)\lambda, \\ v &= (\rho R\lambda L)^2 = (I+RL)\rho + (L+R)\lambda \text{ или } (\rho\bar{R}\lambda L)^2, \\ w &= \pi P \rho R (\pi P)^{-1}(\rho R)^{-1} = -2\rho + (I-R)\pi, \\ z &= \pi P \lambda L (\pi P)^{-1}(\lambda L)^{-1} = -2\lambda + (I-L)\pi. \end{aligned} \tag{9}$$

Эти векторные выражения получаются по правилу перестановки (1). Соотношение $P^2 = I$ $(P = -I)$ имеет нулевой определяющий вектор

$$(\pi P)^2 = (I+P)\pi = 0,$$

который можно отбросить.

Объединим s определяющих векторов и r дробных трансляций, относящихся к одной группе Γ, в мультивекторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{t}$ соответственно. В силу (9) имеет место линейное отображение $\mathbf{u} = Q\mathbf{t}$. Согласно [2, теор. 6] группы орнаментов $\Delta(\Gamma, Z)$ взаимно однозначно (с точностью до изоморфизма) соответствуют элементам фактор-модуля над $\mathbb{Z}$

$$Q\mathbb{R}^{2r} \cap Z^s / QZ^r. \tag{10}$$

Аффинное подобие $\Delta \to F\Delta F^{-1}$ с матрицей $F \in N_0(\Gamma)$ определяет автоморфизм $V(F)$ фактор-модуля (10), который вычисляется по [2, теор. 7] и однозначно определяется смежным классом группы $N_0(\Gamma)$ по нормальной подгруппе Γ. Такие автоморфизмы задают отношение эквивалентности в фактор-модуле, равносильное изоморфизму групп Δ.

Если задано численное значение параметра m, то алгоритм Гаусса, теорема 3 и фактор-модуль (10) (с отношением эквивалентности, определяемым фактор-группой $N_0(\Gamma)/\Gamma$) позволяют эффективно найти конечным числом действий все группы орнаментов с этим значением m.

В качестве примера перечислим все группы орнаментов с параметром $m = 20$. Найдем сначала инвариантные решетки группы A_{20}. Для этого вычислим по алгоритму Гаусса все попарно неэквивалентные относительно унимодулярных подстановок координат $x \to Bx$ приведенные квадратичные формы с дискриминантом $N = 10^2 - 1 = 99$. В полученном списке из каждой пары форм вида (a, b, c) и $(-a, b, -c)$ одну форму отбросим, учитывая дополнительную эквивалентность: умножение формы на -1 в композиции с подстановкой координат $x_1 \to -x_1$, $x_2 \to x_2$. Получим формы

$$f_1 = (5, 8, -7),\ f_2 = (2, 9, -9),\ f_3 = (1, 9, -18),\ f_4 = (3, 9, -6).$$

Обозначим через E_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ соответствующие этим формам базисы вида (6). Таким образом, множество $O(A_{20})$ состоит из четырех классов A_{20}-эквивалентности O_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ с этими представителями. Это же O-множество имеют группы $\bar{A}_{20}$ и B_{20}.

Базисы E_3 и E_4 относятся к решеткам типа * из § 5, поэтому здесь множества O_3 и O_4 не рассматриваются. Базисы инвариантных решеток групп C_{20}, $\bar{C}_{20}$ и D_{20} в множествах O_1 и O_2 найдем по теореме 3. Форма f_1 не является несобственно эквивалентной самой себе, следовательно, в множестве O_1 нет искомых базисов. Поскольку форма f_2 двусторонняя, рассмотрим множество O_2. Так как группа A_{20} максимальна, то минимальная пара базиса $E_0 = E_2$ равна $m_1 = 20$, $l_1 = 1$. Вычислим матрицу

$$B_{22} = \sqrt{2}/6 \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \notin GL(2, \mathbb{Z}).$$

Теперь из табл. 2 следует, что в множестве O_2 есть два класса C_{20}-эквивалентности с представителями E_2 и $\varepsilon_1 E_2$, два класса $\bar{C}_{20}$-эквивалентности с теми же представителями, один класс D_{20}-эквивалентности с представителем E_2.

Осталось вычислить фактор-модули (10) и отношения эквивалентности в них. Для групп A_{20} и $\bar{A}_{20}$ фактор-модули пусты, поэтому группы орнаментов имеют вид $Z \cdot \Gamma$. Для остальных групп поворотов вычисления выполняются без затруднений так же, как в [2]. В табл. 3 приводятся обозначения полученных групп орнаментов.

Таблица 3

Γ	B_{20}		C_{20}		$\bar{C}_{20}$		D_{20}
$E \notin *$	E_1	E_2	E_2	$\varepsilon_1 E_2$	E_2	$\varepsilon_1 E_2$	E_2
Элем. ф.-мод. (10)	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	00 01 10 11
Обозн. Δ	$B_{20}^{E_1}0$ $B_{20}^{E_1}1$	$B_{20}^{E_2}0$ $B_{20}^{E_2}1$	$C_{20}^{E_2}0$ $C_{20}^{E_2}1$	$C_{20}^{\varepsilon_1 E_2}0$ $C_{20}^{\varepsilon_1 E_2}1$	$\bar{C}_{20}^{E_2}0$ $\bar{C}_{20}^{E_2}1$	$\bar{C}_{20}^{\varepsilon_1 E_2}0$ $\bar{C}_{20}^{\varepsilon_1 E_2}1$	$D_{20}^{E_2}0$ $D_{20}^{E_2}1$ $D_{20}^{E_2}2$ $D_{20}^{E_2}3$

§ 5. Решетки *

Пусть d^2 $(1 \leqslant d \in \mathbb{Z})$ делит дискриминант N при четном m (или $4N$ при нечетном m). Рассмотрим формы специального вида

$$d(1,0,-N') \text{ при } m \in 2\mathbb{Z} \text{ и } d(1,1/2,-N'+1/4) \text{ при } m \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{11}$$

где $N' = N/d^2$. Если d_m — наибольшее целое число, квадрат которого делит N при четном m (или $4N$ при нечетном m), то d делит d_m. Поэтому существует столько форм (11), сколько имеется делителей числа d_m. Например, $d_8 = 1$, следовательно, при $m = 8$ имеется только одна форма (11) с $d = 1$; $d_7 = 3$, следовательно, при $m = 7$ имеются две формы со значениями $d = 1, 3$. Формы вида (11) с разными значениями d не эквивалентны, так как преобразования эквивалентности 1 и 2 формы (a, b, c) сохраняют наибольший общий делитель НОД(a, b, c) чисел a, b и c. Формы (11) не исчерпывают всех попарно неэквивалентных форм. Форме (11) соответствует базис вида (6) (деленный на d)

$$E(m,d) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{N'} \\ 1 & \sqrt{N'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2-\sqrt{N'} \\ 1 & 1/2+\sqrt{N'} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Эти базисы не будут попарно A_m-эквивалентны. Напомним, что базисы инвариантных решеток разных групп A_m не сравниваются между собой на Г-эквивалентность.

Группы $\bar{A}_m$ и B_m имеют эти же базисы $E_0 = E(m,d)$ инвариантных решеток, которые являются двусторонними и поэтому принадлежат O-множествам групп поворотов серий VIII–X. По теореме 3 от E_0 отщепляются базисы инвариантных решеток групп C_m, $\bar{C}_m$ и D_m:

$$E(m,d),\ \varepsilon_1 E(m,d),\ E^{(1)}(m,d) = (R(q_{m_1}))^{1/2} E(m,d),\ \varepsilon_1 E^{(1)}(m,d), \tag{13}$$

где (m_1, l_1) — минимальная пара базиса $E(m,d)$, которая согласно определению 3 находится из условий: $q_m = q_{m_1}^{l_1}$, $d_1 = d/\nu_{l_1}(m_1) \in \mathbb{Z}$, $m_1 \equiv \equiv m \,(\mathrm{mod} 2)$ и m_1 — наименьшее. Справедливо утверждение

$$B_{22} \in GL(2,\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \sqrt{m_1 - 2} \in \mathbb{Z} \text{ и делит } d_1.$$

Итак, определено множество решеток с базисами (12) и (13), нумерованное буквами m и d. Это множество обозначим *. В этом параграфе для решеток множества * фактор-модули (10) групп B_m, C_m и D_m вычислим в буквенном виде сразу для всех значений параметра m (группа $\bar{C}_m$ не рассматривается). Эти выкладки и доказательства громоздки, поэтому формулируем только окончательные результаты.

Группа B_m. Базис $E = E(m, d)$. Вычислим фактор-модуль (10) в новой системе координат, взяв базис E решетки за координатный (начало координат оставим на месте). При этом в матрице Q каждая образующая S группы Γ заменится на $S^E = E^{-1}SE$. В новой системе координат имеем $Z = \mathbb{Z}^2$, $\Gamma^E \subset GL(2, \mathbb{Z})$, поэтому определяющие векторы и матрица Q являются целочисленными. Группа $N_0(\Gamma^E)$ является унимодулярной подгруппой нормализатора $N(\Gamma^E)$. На плоскости $Q\mathbb{R}^{2r}$ можно так выбрать локальные координаты $\mathbf{a} = D\mathbf{u}$ (D — t-строчная матрица, t — ранг матрицы Q), что их целочисленные значения и только они дадут целые точки этой плоскости. Умножением справа на унимодулярную матрицу (или элементарными операциями) произведение DQ приводится к каноническому виду $(Q''O)$, где Q'' — квадратная невырожденная целочисленная матрица, O — прямоугольная нулевая матрица. Фактор-модуль (10) взаимно однозначно отобразится на фактор-модуль в пространстве локальных координат

$$\mathbb{Z}^t/Q''\mathbb{Z}^t. \tag{14}$$

Далее задаются уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^{2r}$ и фактор-модуль (14) с помощью сравнений. Этим однозначно определяется фактор-модуль (10).

Возможны случаи:

1) Пусть $m \in 2\mathbb{Z} + 1$. К группе B_m относятся определяющий вектор w и дробные трансляции ρ и π. Поэтому равенства (9) дадут матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} -2I & I - (R(q_m))^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-(m+d)/2 & dN_1' \\ 0 & -2 & d & 1-(m-d)/2 \end{pmatrix},$$

где $N_1' = N' - 1/4$. Ранг Q равен 2, поэтому локальными координатами являются w_1 и w_2, фактор-модули (10) и (14) совпадают. В данном случае

$Q'' = I$. Действительно, пусть t_{ij} — элементы матрицы Q. Один из диагональных элементов матрицы $(R(q_m))^E$ нечетен, так как ее след m нечетен. Тогда d и dN'_1 нечетны, иначе определитель этой матрицы был бы четным. Соответственно, сумма $t_{13} + t_{24} = 2 - m$ нечетна, следовательно, либо t_{13} четно и t_{24} нечетно, либо наоборот. Рассмотрим первую возможность (вторая приводит к тому же результату). Прибавив линейную комбинацию 1-го и 2-го столбцов с коэффициентами $t_{13}/2$ и $(t_{23}-1)/2$ соответственно к 3-му столбцу, превратим его в $\binom{0}{1}$. Вычитая этот столбец из остальных с подходящими коэффициентами, обратим в 0 всю 2-ю строку, кроме $t_{23} = 1$, не меняя при этом 1-й строки. Далее прибавив 1-й столбец, умноженный на $(t_{14} - 1)/2$, к 4-му, обратим последний в $\binom{1}{0}$. Затем, как выше, занулим 1-ю строку, кроме $t_{14} = 1$. Наконец, переставляя столбцы, получим искомую каноническую форму $(I\ O)$. В этом случае фактор-модуль (14) равен $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$, т. е. состоит из одного нулевого класса вычетов $\mathbb{Z}^2$.

2) Пусть $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z}$. Тогда $w_1 \equiv \alpha$, $w_2 \equiv \beta \pmod 2$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$. Элемент, определяемый числами α и β (обозначим его через $\alpha\beta$), есть класс вычетов, состоящий из точек w с целыми координатами w_1, w_2 той же четности, что и числа α, β соответственно.

3) Пусть $m \in 4\mathbb{Z} + 2$, $d \in 2\mathbb{Z} + 1$. Тогда $w_1 \equiv \alpha \pmod 2$ $(\alpha = 0, 1)$.

4) Пусть $m \in 4\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z} + 1$. Тогда $w_1 + w_2 \equiv \alpha \pmod 2$ $(\alpha = 0, 1)$.

Согласно [2, теор. 7] отношение эквивалентности в фактор-модуле определяется автоморфизмами $V(F)$ $(F \in N_0(B_m^E))$, которые являются линейными отображениями. Так как нулевой класс вычетов не эквивалентен ненулевому, нетривиальная эквивалентность может существовать только в случае 2, когда m и d четны. Она действительно существует и имеет вид $01 \approx 10$ либо $10 \approx 11$ при некоторых исключительных значениях параметров m и d. Фактор-группа $N_0(B_m^E)/B_m^E$ всегда имеет один образующий элемент с представителем L^E. Есть еще второй образующий элемент с представителем $F = F_1$, если $F_1 = (\varepsilon_1(R(q_{m_1}))^{1/2})^E \in GL(2, \mathbb{Z})$, или $F = F_1^2$, если $F_1 \notin GL(2, \mathbb{Z})$ и $m_1 < m$. Автоморфизм $V(L^E)$ тождествен, а $V(F)$: $w \to Fw$ (так как F принадлежит унимодулярному централизатору $C_0(B_m^E) \subset N_0(B_m^E)$). Матрицы F_1 и F_1^2 выражаются через минимальную пару $(m_1 = 2n_1, l_1)$ базиса E и $d_1 = d/\nu_{l_1}(m_1)$ по формулам

$$e = \sqrt{(n_1 - 1)/2} \in \mathbb{Z} \text{ и } k = d_1/2e \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow F_1 = \begin{pmatrix} -e & kN' \\ k & -e \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z});$$

$$F_1^2 = \begin{pmatrix} n_1 & -d_1 N' \\ -d_1 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Возможные значения этих матриц по модулю 2 таковы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последние два значения порождают требуемые эквивалентности в фактор-модулях.

Для остальных групп поворотов при нечетном значении параметра m фактор-модуль (14) также состоит только из одного нулевого вычета. Поэтому далее рассматриваются только четные значения m.

Группа C_m. К группе C_m относятся определяющие векторы u, v и дробные трансляции ρ, λ. Отсюда матрица $Q = (t_{ij})$ определяется равенствами (9). Пространство определяющих векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ является 4-мерным, а ранг матрицы Q равен 2, поэтому плоскость $Q\mathbb{R}^4$ задается уравнениями

$$(I - L^E)u = 0, \quad (I - (R(q_m))^E L^E)v = 0,$$

из которых два будут независимыми.

Для элементов блоков матрицы Q

$$I + L^E = \begin{pmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{pmatrix}, \quad I + (R(q_m))^E L^E = \begin{pmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{pmatrix}$$

примем обозначения, которые сохранятся до конца параграфа:

$$t'_{23} = \text{НОД}(t_{13}, t_{23}), \quad t_{13} = t'_{13} t'_{23}, \quad t_{23} = k_1 t'_{23} \ (k_1 \neq 0),$$
$$t'_{41} = \text{НОД}(t_{31}, t_{41}), \quad t_{31} = t'_{31} t'_{41}, \quad t_{41} = k t'_{41} \ (k_1 \neq 0).$$

Производные от $E_0 = E(m, d)$ базисы рассматриваются только при выполнении указанных в теореме 3 условий.

Б а з и с $E = E(m, d)$. В качестве локальных координат на плоскости $Q\mathbb{R}^4$ можно взять u_1 и v_2/k (на плоскости $Q\mathbb{R}^4$ координата v_2 кратна k), поскольку остальные координаты выражаются через них в виде линейных комбинаций с целыми коэффициентами: $u_2 = 0$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$.

1) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z} + 1$, то $u_1 \equiv \alpha \pmod 2$ $(\alpha = 0, 1)$.

2) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z}$, то $u_1 \equiv \alpha$, $v_2/k \equiv \beta \pmod 2$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$.

Б а з и с $E = \varepsilon_1 E(m, d)$. Локальные координаты: u_2 и v_2/k; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^4$: $u_1 = 0$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$.

1) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z} + 1$, то $u_2 \equiv \alpha \pmod 2$ $(\alpha = 0, 1)$.

2) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z}$, то $u_2 \equiv \alpha$, $v_2/k \equiv \beta \pmod 2$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$.

Б а з и с $E = E^{(1)}(m, d)$. Локальные координаты: u_2/k_1 и v_2/k; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^4$: $u_1 = t'_{13} \cdot u_2/k_1$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$.

1) Пусть $m \in 2\mathbb{Z}$, $d_1 \in 2\mathbb{Z} + 1$. Вместо d рассматривается величина $d_1 = d/\nu_{l_1}(m_1)$, где (m_1, l_1) — минимальная пара базиса. Фактор-модуль (14) равен $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$.

2) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d_1 \in 2\mathbb{Z}$, то $u_2/k_1 \equiv \alpha$, $v_2/k \equiv \beta \pmod 2$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$.

Б а з и с $E = \varepsilon_1 E^{(1)}(m, d)$. В этом случае действуют без изменения утверждения для базиса $E^{(1)}(m, d)$.

Если $\sqrt{m + 2}$ является целым числом и делит d, то во всех фактор-модулях (14) группы C_m в случае 2 выполняется эквивалентность $01 \approx \approx 10$. При остальных значениях m и d все четыре элемента попарно не C_m-эквивалентны.

Группа D_m. К группе поворотов D_m относятся все определяющие векторы u, v, w, z и дробные трансляции ρ, λ, π (9). Ранг матрицы Q равен 4, поэтому плоскость $Q\mathbb{R}^6 \subset \mathbb{R}^8$ задается уравнениями

$$2u + (I + L^E)z = 0,\ 2v + (I + (R(q_m))^E L^E)(w + Lz) = 0.$$

Удобно выполнить замену $(w, z) \to (\bar{w}, \bar{z})$:

$$\bar{w} = Bw + BLz,\ \bar{z} = B_1 z,$$

где унимодулярные матрицы B и B_1 с определителем 1 выбираются в зависимости от случая.

Базис $E = E(m, d)$. 1) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z}+1$, то полагаем

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ t'_{41} & t'_{42} \end{pmatrix}, \quad B_1 = I$$

(числа $a, b \in \mathbb{Z}$ найдутся, так как t'_{41} и t'_{42} взаимно просты). Локальные координаты: u_1, $\bar{z}_2$, v_2/k, $\bar{w}_1$; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^6$: $u_2 = 0$, $v_1 = t'_{31} \cdot \cdot v_2/k$, $\bar{z}_1 = -u_1$, $\bar{w}_2 = -2 \cdot v_2/k$. Тогда

$$u_1 \equiv \alpha,\ \bar{z}_2 \equiv \beta \,(\mathrm{mod}\, 2)\ (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Все эти элементы попарно не эквивалентны.

2) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d \in 2\mathbb{Z}$, то полагаем

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ t'_{41}/2 & t'_{42}/2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = I$$

(числа $t'_{41}/2$ и $t'_{42}/2$ — целые и взаимно простые). Локальные координаты: u_1, $\bar{z}_2$, v_2/k, $\bar{w}_1$; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^6$ $u_2 = 0$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$, $\bar{z}_1 = -u_1$, $\bar{w}_2 = -v_2/k$. Тогда

$$u_1 \equiv \alpha,\ \bar{z}_2 \equiv \beta,\ v_2/k \equiv \gamma,\ \bar{w}_1 \equiv \delta \,(\mathrm{mod}\, 2)\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1).$$

Если $\sqrt{m+2}$ является целым числом и делит d, то имеет место эквивалентность $\alpha\beta\gamma\delta \approx \gamma\delta\alpha\beta$; если $\sqrt{m-2}$ целочислен и делит d, то $\alpha\beta\gamma\delta \approx \delta\gamma\beta\alpha$. Оба случая дают десять попарно не эквивалентных элементов. Для остальных значений параметров m и d все шестнадцать элементов фактор-модуля попарно не эквивалентны.

Базис $E = E^{(1)}(m, d)$. Этот базис не D_m-эквивалентен предыдущему базису $E(m, d)$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{m+2}$ целочислен и делит d. Поэтому он рассматривается только в таком случае.

1) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d_1 = d/\nu_{l_1}(m_1) \in 2\mathbb{Z}+1$ (напомним, что (m_1, l_1) — минимальная пара базиса $E(m, d)$, l_1 четно), то полагаем

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ t'_{41} & t'_{42} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ t'_{23} & t'_{24} \end{pmatrix}$$

(a, b, a_1, $b_1 \in \mathbb{Z}$ найдутся). Локальные координаты: u_2/k_1, $\bar{z}_1$, v_2/k, $\bar{w}_1$; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^6$: $u_1 = t'_{13} \cdot u_2/k_1$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$, $\bar{z}_2 = -2u_2/k_1$, $\bar{w}_2 = -2v_2/k$. Тогда

$$\bar{z}_1 + \bar{w}_1 \equiv \alpha \,(\mathrm{mod}\, 2) \ (\alpha = 0, 1).$$

2) Если $m \in 2\mathbb{Z}$, $d_1 \in 2\mathbb{Z}$, то полагаем

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ t'_{41}/2 & t'_{42}/2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ t'_{23}/2 & t'_{24}/2 \end{pmatrix}.$$

Локальные координаты: u_2/k_1, $\bar{z}_1$, v_2/k, $\bar{w}_1$; уравнения плоскости $Q\mathbb{R}^6$: $u_1 = t'_{13} \cdot u_2/k_1$, $v_1 = t'_{31} \cdot v_2/k$, $\bar{z}_2 = -u_2/k_1$, $\bar{w}_2 = -v_2/k$. Тогда

$$u_2/k_1 \equiv \alpha, \ \bar{z}_1 \equiv \beta, \ v_2/k \equiv \gamma, \ \bar{w}_1 \equiv \delta \,(\mathrm{mod}\, 2) \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1).$$

Только десять элементов будут попарно не эквивалентны, так как $\alpha\beta\gamma\delta \approx \approx \gamma\delta\alpha\beta$.

§ 6. Всюду плотность орбиты почти любой точки

Пусть Δ — одна из групп серий V–X. Докажем, что орбита почти любой точки $x \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Or}_{\,x} = \{gx \mid g \in \Delta\}$$

всюду плотна в $\mathbb{R}^2$ относительно эвклидовой метрики. Здесь слово *почти* означает, что множество точек x, для которых это утверждение ложно, имеет лебегову меру 0. Достаточно доказать это для групп серии V, так как любая другая рассматриваемая группа Δ содержит в качестве своей подгруппы группу этого вида.

Для простоты обозначений рассмотрим конкретную группу A_4^1:

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \ q = 2 + \sqrt{3}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Перейдем в систему координат $x' = E^{-1}x$. Тогда

$$R^E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A, \ Z = \mathbb{Z}^2.$$

Подмножество $\mathbb{Z}^2 A^n x$ орбиты точки x является элементом единичного тора $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с представителем $A^n x$. Поскольку матрица A унимодулярна, она отображает тор T на себя. Таким образом, орбита точки x является траекторией динамической системы $\{A^n\}$ на торе T. Полутраектория $\{A^n x \mid n = 0, 1, \dots\}$ всюду плотна, так как отображение $A : T \to T$ эргодично (последнее докажем ниже).

Функция $u(x)$ считается заданной на торе T, если она принимает одинаковое значение во всех точках множества $\mathbb{Z}^2 x$, т. е. является периодической с периодом 1 по обеим своим переменным. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(T)$, состоящее из таких периодических функций с конечной нормой

$$||u|| = \left(\int_{T_0} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где T_0 — квадрат $0 \leqslant x_1, x_2 < 1$. Определим линейный оператор U_A в $L_2(T)$ с помощью равенства $(U_A u)(x) = u(Ax)$. В силу равенства $\det A = 1$ он является унитарным.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо* $U_A u = u \Rightarrow u = \mathrm{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $u(x)$ в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} c_n \exp(2\pi i n \cdot x),$$

где $n \cdot x = n_1 x_1 + n_2 x_2$. Имеет место равенство Парсеваля

$$||u||^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |c_n|^2. \tag{15}$$

Найдем ряд Фурье образа $U_A u$:

$$(U_A u)(x) = u(Ax) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} c_n \exp(2\pi i n \cdot Ax).$$

Заменой индекса суммирования $n \to n' = A^T n$ получается ряд Фурье с коэффициентами $c'_n = c_{(A^T)^{-1} n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}^2$ (новый индекс суммирования n' снова переобозначаем через n). Пусть $U_A u = u$. Тогда имеем следующие уравнения на коэффициенты Фурье функции $u(x)$:

$$c_n = c_{(A^T)^{-1} n} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}^2. \tag{16}$$

Предположим, что $u \neq \text{const}$, т. е. существует $n_0 \neq 0$ такое, что $c_{n_0} \neq 0$. Подставив в (16) значение $n = n_0$, получим $c_{(A^T)^{-1}n_0} = c_{n_0}$. Теперь подставим в (16) индекс $n = (A^T)^{-1}\, n_0$ и т.д. Получится бесконечная цепочка одинаковых ненулевых коэффициентов Фурье

$$c_{n_0} = c_{(A^T)^{-1}n_0} = \ldots = c_{(A^T)^{-j}n_0} = \ldots,$$

причем все они имеют разные индексы. Действительно, если $(A^T)^{-i}n_0 = (A^T)^{-j}n_0$ $(i < j)$, то $(A^T)^{j-i}n_0 = n_0$, т. е. матрица $(A^T)^{j-i}$ имеет собственное число 1, что невозможно, так как ее собственными числами являются $q^{\pm(j-i)} \neq 1$. Таким образом, получается расходящийся ряд (15). Следовательно, такая функция $u \in L_2(T)$ не существует. Данное противоречие показывает, что возможен только один ненулевой коэффициент Фурье c_0, т. е. $u = \text{const}$. $\square$

Измеримое множество $N \subset T$ называется *инвариантным* относительно отображения A, если N и $A^{-1}N$ различаются не более чем на множество меры 0. Это равносильно равенству $\chi_N(x) = \chi_N(Ax)$ почти всюду, где χ_N — характеристическая функция множества N. Отображение A называется *эргодичным*, если любое его инвариантное множество имеет меру 0 или 1 (см. [9]). Итак, пусть N — инвариантное множество отображения A. Так как $\chi_N(x)$ и $\chi_N(Ax)$ принадлежат гильбертовому пространству $L_2(T)$, то как его элементы они совпадают. С другой стороны $\chi_N(Ax) = (U_A\chi_N)(x)$, и тогда $U_A\chi_N = \chi_N$. По теореме 4 получаем $\chi_N = \text{const}$. Следовательно, N равно $\varnothing$ или T. Значит, отображение A эргодично. Более общие вопросы рассмотрены в [10].

Орнаментальный рисунок на эвклидовой плоскости можно рассматривать как непрерывную (или кусочно непрерывную) функцию, инвариантную относительно некоторой группы орнаментов. На плоскости Минковского не существует непрерывного в этом смысле орнамента, отличного от эвклидова. Действительно, такая непрерывная функция принимала бы одинаковое значение на всюду плотном множестве точек, следовательно, была бы постоянной.

Найденные группы орнаментов являются дискретными подгруппами частного вида группы Пуанкаре. Возникает вопрос об их физическом смысле. Казалось бы, раз дискретные подгруппы неоднородной ортогональной группы связаны с неподвижными физическими кристаллами, то последним должны соответствовать колеблющиеся кристаллы. Рассмотрим эту связь подробнее. Сами твердые тела, которые, как правило, являются кристаллами, породили понятие длины и ортогональной группы. Какие же физические субстанции связаны с группой Пуанкаре? Электромагнитные волны в вакууме! Волны затруднительно классифицировать так, как частицы. Но можно классифицировать симметрию периодических решений уравнений Максвелла дискретными подгруппами группы Пуанкаре. Как вытекает из вышеизложенного, эти решения (за исключением тривиальных) не будут инвариантными относительно дискретной подгруппы группы Лоренца. Таким образом, дискретизация физического явления в классе периодических функций не релятивистски инвариантна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. М. Гарипов*, Алгебраический метод вычисления кристаллографических групп I, Сиб. ж. индуст. матем., **3**, N 2 (2000), 43—62.
2. *Р. М. Гарипов*, Алгебраический метод вычисления кристаллографических групп II, Сиб. ж. индуст. матем., **4**, N 1 (2001), 52—72.
3. *И. А. Балтаг, В. П. Гарит*, Полный вывод федоровских групп псевдоэвклидовой плоскости, Исследования по дискретной геометрии, Кишинев, Изд-во КГУ, 1974, 91—107.
4. *И. А. Балтаг, В. П. Гарит*, Двумерные дискретные афинные группы, Кишинев, Штиинца, 1981.
5. *L. Bieberbach*, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Math. Ann., **70** (1911), 297—336.
6. *L. Bieberbach*, Die Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich, Math. Ann., **72** (1912), 400—412.
7. *Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров*, Математические основы структурного анализа кристаллов, Л., М., Гостехиздат, 1934.

8. *К. Ф. Гаусс*, Труды по теории чисел, М., Изд-во АН СССР, 1959.
9. *П. Биллингслей*, Эргодическая теория и информация, М., Мир, 1969.
10. *Б. М. Гуревич, Я. Г. Синай*, Алгебраические автоморфизмы тора и цепи Маркова, доп. к кн. [9], 205—233.

Адрес автора:

Поступило 11 января 2002 г.

ГАРИПОВ Равиль Мухамедзянович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Лаврентьева, 15,
Институт гидродинамики СО РАН.
e-mail: garipov@hydro.nsc.ru